Ejercicios de Análisis Matemático
Derivadas e integrales - Soluciones

Ejercicio 1. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x\,\operatorname{sen} x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x^2}$$

Solución.

$a)$ Tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$, como puedes comprobar usando la regla de L'Hôpital o, mejor, usando que si $\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=0$, entonces $e^{h(x)}-1\sim h(x)\ (x\to a)$. Por tanto, el límite pedido es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y puede usarse la regla de L'Hôpital (son funciones derivables y la derivada del denominador no se anula) pero podemos ahorrarnos trabajo si, antes de aplicar dicha regla, usamos la equivalencia asintótica $\operatorname{sen} x\sim x\ (x\to 0)$. Tenemos así:

$$\frac{\log\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x\operatorname{sen} x}\sim\frac{\log\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x^2} \tag{1}$$

Ahora aplicamos la *regla salvadora*, derivamos numerador y denominador, y tenemos que calcular el límite para $x\to 0$ de la función:

$$\frac{x^2}{e^{x^2}-1}\,\frac{2x^3e^{x^2}-2x\,e^{x^2}+2x}{2x^5}\sim\frac{x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1}{x^4}.$$

Donde hemos usado la equivalencia asintótica $e^{x^2}-1\sim x^2\ (x\to 0)$ para ahorrarnos trabajo. Todo lo que tenemos que hacer ahora es calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1}{x^4}=(\textit{la santa regla})=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3e^{x^2}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

También, recordando que si $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=1$, entonces $\log(g(x))\sim g(x)-1\ x\to a$, podríamos haber hecho lo que sigue:

$$\frac{\log\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x\operatorname{sen} x}\sim\frac{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-1}{x^2}=\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}.$$

El límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$ se calcula fácilmente con la ayuda del marqués.

$b)$ Puesto que $\operatorname{arc\,tg} x\sim x\ (x\to 0)$, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Según la regla de equivalencia logarítmica:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{1/x^2}=e^L\iff\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}-1\right)=L.$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}-1\right)=\frac{\operatorname{arc\,tg} x-x}{x^3}.$$

Aplicando *Lo Único* tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3(1+x^2)}=-\frac{1}{3}.$$

Concluimos que el límite pedido es igual a $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

c) Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y el Santo Marqués de L'Hôpital viene en nuestra ayuda.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{1-\cos x+x\operatorname{sen} x}$$

Este límite sigue siendo una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar otra vez *La Única Regla*, pero antes de hacerlo es conveniente simplificar.

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{1-\cos x+x\operatorname{sen} x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1-\cos x+x\operatorname{sen} x}\sim\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1-\cos x+x\operatorname{sen} x}$$

Donde hemos usado la evidente equivalencia asintótica $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sim 1$ $(x\to 0)$. Después de simplificar vemos que podemos aplicar *Lo Único*. Derivamos numerador y denominador y obtenemos:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen} x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x}{2\operatorname{sen} x+x\cos x}$$

El límite de esta función para $x\to 0$ sigue siendo del tipo $\frac{0}{0}$ y podemos volver a derivar numerador y denominador, pero no es preciso porque dividiendo por x numerador y denominador se tiene que:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen} x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x}{2\operatorname{sen} x+x\cos x}=\frac{\sqrt{1-x^2}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos x}{2\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}+\cos x}\longrightarrow\frac{2}{3}$$

También podríamos haberlo hecho sin derivar tanto. Basta recordar que $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ $(x\to 0)$ (es otro de los *límites que debes saberte de memoria*). Tenemos que:

$$\frac{\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}\sim 2\frac{\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=2\frac{\operatorname{arc\,sen} x-x}{x^3}+2\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}\tag{2}$$

Sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6}$. Queda calcular el otro límite. Usando, una vez más, la *Regla Universal*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}$$

Simplificamos esta expresión.

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}\sim\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}$$

El límite sigue siendo una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar de nuevo la *Regla*, pero es más sencillo simplificar multiplicando numerador y denominador por $1+\sqrt{1-x^2}$ con lo que resulta:

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}=\frac{x^2}{3x^2\big(1+\sqrt{1-x^2}\big)}=\frac{1}{3\big(1+\sqrt{1-x^2}\big)}\to\frac{1}{6}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad (2), deducimos que el límite pedido es igual a $2\dfrac{1}{6}+2\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$.

d) Se trata de un límite del tipo $\lim\limits_{x\to 0} u(x)^{v(x)}$ donde:

$$u(x)=\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x}{x^3},\quad v(x)=\frac{1}{x^2}$$

Empezaremos calculando $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$. Como es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, usando la RUPCL (Receta Universal Para Calcular Límites) tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{x^2}=1.$$

En consecuencia, el límite pedido es una indeterminación del tipo 1^∞. Usamos el criterio de equivalencia logarítmica y tenemos que:

$$v(x)(u(x)-1)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x}{x^3}-1\right)=\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x-x^3}{x^5}$$

Podemos ahora usar una vez más la RUPCL. Derivando numerador y denominador resulta:

$$\frac{3x\operatorname{sen} x-3x^2}{5x^4}=\frac{3}{5}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^3}\longrightarrow\frac{3}{5}\frac{-1}{6}=-\frac{1}{10}.$$

Concluimos que $\lim\limits_{x\to 0} u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{-1/10}$. ☺

Comentarios. Hay errores de todo tipo. Los principales son debidos a que no simplificáis antes y después de aplicar la regla de L'Hôpital. Por supuesto, hay quien aplica la regla sin pararse a comprobar que puede hacerlo, es decir, que el límite en cuestión es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Ese es un error típico. Otro error muy frecuente es sustituir en una suma una función por otra asintóticamente equivalente. Lo hemos repetido muchísimas veces: eso no puede hacerse, ***no se puede sustituir una función por otra asintóticamente equivalente en una suma***, eso solamente puede hacerse cuando la función multiplica o divide a todas las demás. Por ejemplo, sabemos que $\log(1+x)\sim x$ para $x\to 0$, pero no es verdad que $\operatorname{sen} x-\log(1+x)\sim\operatorname{sen} x-x$ para $x\to 0$; de hecho se tiene que $\operatorname{sen} x-\log(1+x)\sim x^2/2$. Tampoco pueden sustituirse equivalencias asintóticas en funciones, es decir, si $\alpha(x)\sim\beta(x)$ para $x\to a$ y f es una función, no es verdad en general que $f(\alpha(x))\sim f(\beta(x))$ para $x\to a$. Por ejemplo, las funciones x^2 y x^2+x son asintóticamente equivalentes para $x\to+\infty$, pero e^{x^2+x} no es asintóticamente equivalente a e^{x^2} para $x\to+\infty$ (su cociente diverge positivamente).

Otro error demasiado frecuente se debe a que descomponéis un límite como suma de varios de cualquier manera. Como norma general, ***nunca descompongas un límite como suma o como producto de otros***, eso solamente puedes hacerlo si sabes que cada una de las funciones en la suma o en el producto tiene límite finito.

Ejercicio 2. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

Solución. Hay que minimizar la cantidad de aluminio empleada para hacer la lata. Llamando h a la altura, nos dicen que el volumen es 1 litro. En lo que sigue supondremos que usamos el decímetro como unidad de medida Por tanto deberá ser:

$$\pi r^2 h=1\Longrightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$$

La cantidad de material empleado será la suma del área lateral de la lata más los dos cuadrados de lado $2r$ que se necesitan para hacer las tapas, es decir $2\pi r h+2(2r)^2$. Sustituyendo el valor de h obtenemos la función:

$$f(r)=\frac{2}{r}+8r^2$$

definida en $]0,+\infty[$. El ejercicio nos pide calcular un valor mínimo absoluto de dicha función en $]0,+\infty[$. Para ello, como es una función derivable, calcularemos los puntos críticos y estudiaremos la variación en el signo de la derivada.

$$f'(r) = -\frac{2}{r^2} + 16r = 2\frac{8r^3-1}{r^2}.$$

Por tanto $f'(r)=0 \Longrightarrow r=1/2$. Deducimos fácilmente que:

$$\begin{array}{l} 0<r<1/2 \Longrightarrow f'(r)<0 \Longrightarrow f \downdownarrows \text{ en }]0,1/2] \Longrightarrow f(r)>f(1/2) \\ 1/2<r \Longrightarrow f'(r)>0 \Longrightarrow f \upuparrows \text{ en } [1/2,+\infty[\Longrightarrow f(1/2)<f(r) \end{array}$$

Hemos probado que f alcanza un mínimo absoluto para $r=1/2$. Por tanto, para minimizar el coste de producción debemos cortar cuadrados de lado $2r=1$ decímetro y la altura de la lata debe ser $h=4/\pi \approx 1.273$ decímetros.

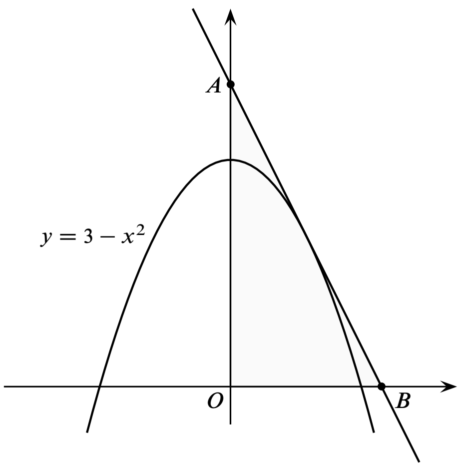
Alternativamente, podemos razonar como sigue. La derivada de f se anula en un *único punto* en el intervalo $]0,+\infty[$. Por tanto, debe tener signo constante en los intervalos $]0,1/2[$ y $]1/2,+\infty[$. Como $f'(1/4)<0$ y $f'(1)>0$, deducimos que tiene que ser $f'(r)<0$ en $]0,1/2[$ y $f'(r)>0$ en $]0,+\infty[$. ☺

Comentarios. Lo que hay que minimizar es la cantidad de aluminio que se usa, no la superficie de la lata. El enunciado es muy claro al respecto.

En este ejercicio y en los ejercicios 3 y 5 muchos de vosotros usáis la derivada segunda. Lo repetiré una vez más: el criterio de la derivada segunda nos informa si un punto crítico es un extremo **relativo**, dicho criterio no proporciona información de si dicho punto es un extremo absoluto en un intervalo. En los ejercicios de extremos casi siempre se buscan extremos absolutos, por lo que el criterio de la derivada segunda por sí solo no es suficiente. Cuando la derivada segunda es siempre positiva o siempre negativa *en todos los puntos de un intervalo*, en tal caso sí se puede asegurar que el único punto crítico de la derivada es, respectivamente, un mínimo o un máximo absolutos. Mi consejo es que, siempre que sea fácil, se estudie el signo de la derivada primera a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Esto es particularmente sencillo cuando en el intervalo hay un único punto crítico, porque en tal caso a ambos lados de dicho punto crítico la derivada debe tener signo constante (¿sabes por qué?), por lo que es suficiente evaluar la derivada en dos puntos, uno a cada lado del punto crítico, o bien calcular los límites de la derivada en los extremos del intervalo, para saber su signo a ambos lados del punto crítico.

Ejercicio 3. Calcula un punto (u,v) de la parábola $y=3-x^2$ de forma que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima.

Solución.



Pongamos $f(x)=3-x^2$. La tangente en un punto genérico $(u,f(u))$ es la recta de ecuación:

$$y = f(u)+f'(u)(x-u) = 3+u^2-2ux.$$

Los puntos de corte con los ejes de dicha recta son $A = \left(\frac{3+u^2}{2u}, 0\right)$ y $B = (0, 3+u^2)$. Consideraremos en lo que sigue que $u > 0$. El área del triángulo OAB es:

$$h(u) = \frac{(3+u^2)^2}{4u}.$$

Se trata de calcular el mínimo absoluto de dicha función en $\mathbb{R}^+$. Tenemos que:

$$h'(u) = \frac{4u^2(3+u^2) - (3+u^2)^2}{4u^2} = \frac{3(3+u^2)(u^2-1)}{4u^2}.$$

Obtenemos que el único punto crítico de h en $\mathbb{R}^+$es $u_0 = 1$. Tenemos que: Deducimos que:

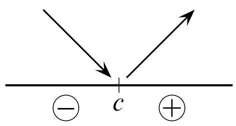
$$\begin{array}{l} 0 < u < 1 \Longrightarrow h'(u) < 0 \Longrightarrow h \downdownarrows \text{ en }]0,1] \Longrightarrow h(u) > h(1) \\ 1 < u \Longrightarrow h'(u) > 0 \Longrightarrow h \upuparrows \text{ en } [1,+\infty[\Longrightarrow h(1) < h(x) \end{array}$$

Hemos probado así que $h(u) \geqslant h(1)$ para todo $u > 0$. Por tanto, para $u > 0$, el triángulo de área mínima se obtiene para $u = 1$ y su area es igual a $h(1) = 4$.

Por la simetría de la parabola, para $u < 0$, se obtiene otro triángulo de área mínima para $u = -1$. ☺

Comentario. En este tipo de ejercicios valoro mucho la justificación de que el punto crítico obtenido sea un extremo absoluto de la función en un cierto intervalo. Vuelvo a repetir que para eso no basta solamente con calcular el valor de la derivada segunda en dicho punto. En general, la forma más adecuada es estudiar el signo de la derivada primera como se ha hecho arriba.

Algunos se limitan a hacer un esquema parecido al siguiente.



Y, sin escribir ni una palabra, suponen que eso justifica que en el punto c hay un mínimo absoluto. No está mal hacer esquemas, pero un esquema es una explicación muy pobre. Siempre debes explicar con palabras lo que haces, un esquema no es suficiente.

Ejercicio 4. Calcula el área de las dos partes en que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 7$.

Solución. Una representación gráfica siempre ayuda a evitar errores.

Se calculan fácilmente los puntos de intersección de dichas curvas $y^2 = 7 - x^2$, $y^2 = -1 + x^2$.

$$7 - x^2 = -1 + x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

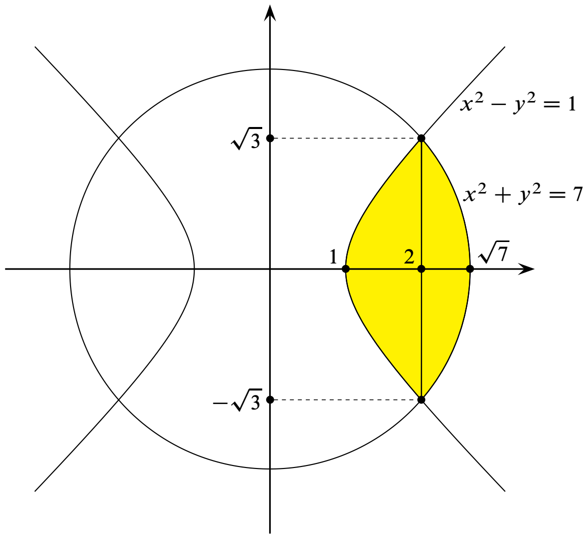
Los correspondientes valores de y son $\pm\sqrt{3}$.

Por simetría, el área pedida es dos veces el área de la región coloreada en amarillo. Podemos calcular el área de dicha región considerándola como una región de tipo II, en cuyo caso su área viene dada por:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{7-y^2} - \sqrt{1+y^2}\right) \mathrm{d}y$$

También podemos calcular el área de dicha región considerándola como región de tipo I. Las curvas que la limitan por arriba son $y = \sqrt{x^2-1}$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$ e $y = \sqrt{1-x^2}$ para $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$. Las opuestas de dichas curvas limitan a la región por abajo. Luego su área viene dada por:

$$2\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x + 2\int_2^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2}\,\mathrm{d}x$$



Todo lo que queda es calcular las primitivas que permitan evaluar estas integrales. Se trata de primitivas inmediatas pero debes saber calcularlas. Vamos a calcular primitivas de las funciones $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$ donde $a>0$.

Cálculo de una primitiva de la función $\sqrt{a^2-x^2}$.

Se supone en lo que sigue que $a^2-x^2 \geqslant 0$, es decir $|x| \leqslant a$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \big[x = a\,\mathrm{sen}\,t\big] = a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= a^2\frac{t}{2} + a^2\frac{\mathrm{sen}(2t)}{4} = a^2\frac{t}{2} + a^2\frac{\mathrm{sen}\,t\cos t}{2} = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \\
&= \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.
\end{aligned}$$

Cálculo de una primitiva de la función $\sqrt{x^2+a^2}$.

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \big[x = a\,\mathrm{senh}\,t\big] = a^2\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1+\cosh(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= a^2\frac{t}{2} + a^2\frac{\mathrm{senh}(2t)}{4} = a^2\frac{t}{2} + a^2\frac{2\cosh t\,\mathrm{senh}\,t}{2} = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{argsenh}\,\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} = \\
&= \frac{a^2}{2}\,\mathrm{argsenh}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}.
\end{aligned}$$

Cálculo de una primitiva de la función $\sqrt{x^2-a^2}$.

Se supone en lo que sigue que $x^2-a^2 \geqslant 0$, es decir $|x| \geqslant a$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \big[x = a\cosh t\big] = a^2\int \mathrm{senh}^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= -a^2\frac{t}{2} + a^2\frac{\mathrm{senh}(2t)}{4} = -a^2\frac{t}{2} + a^2\frac{\mathrm{senh}\,t\cosh t}{2} = -\frac{a^2}{2}\,\mathrm{argcosh}\,\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \\
&= -\frac{a^2}{2}\,\mathrm{argcosh}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}.
\end{aligned}$$

Las relaciones usadas entre las funciones seno y coseno hiperbólicos se deducen directamente de sus definiciones.

Deducimos que:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{7-y^2}-\sqrt{1+y^2}\right) \mathrm{d}y = 7 \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3/7}) - \log(2+\sqrt{3}).$$

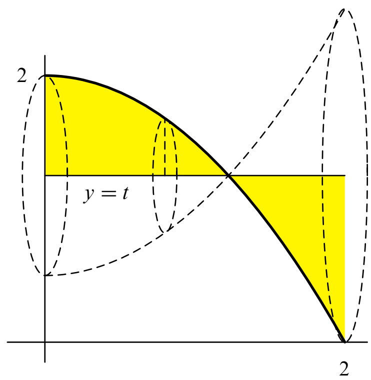
$$2\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x + 2\int_2^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{7\pi}{2} - 7 \operatorname{arc\,sen}(2/\sqrt{7}) - \log(2+\sqrt{3}).$$

Por supuesto, ambos resultados son el mismo como puedes comprobar con *Maxima*. ☺

Comentarios. El primer ejemplo que hice en clase de la técnica de cambio de variables fue para calcular la integral $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ y, además, dije que la preguntaría en examen. Dicha integral está hecha en mi libro de *Cálculo Diferencial de Funciones de una Variable*, en el ejercicio resuelto 197 c) (pg. 451), y también en el ejercicio resuelto 210 (pg. 489). Un ejercicio muy parecido a este es el ejercicio resuelto 203 (pg. 469) en el que se calcula el área de la región comprendida entre un círculo y una parábola. La integral $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ está hecha en el ejercicio resuelto 222 (pg. 498).

En este ejercicio muchos os limitáis a evaluar las primitivas que figuran en la tabla de integrales inmediatas de mi libro. No me parece mal que se haga eso en un examen escrito porque indica que has estudiado y aprendido de memoria dichas primitivas, pero no entiendo que se haga así en un ejercicio para hacer en casa porque eso no me dice nada; simplemente te limitas a copiar una primitiva y a evaluarla. Lo procedente es utilizar la técnica de cambio de variables. He tenido también en cuenta si se hacen o no las simplificaciones necesarias para expresar el resultado final de forma clara. Muchos de vosotros expresáis el resultado con números decimales. Me parece bien que uses programas como *Maxima* o *Mathematica* para calcular primitivas de forma simbólica, siempre que tú completes los pasos intermedios para llegar al resultado final, pero no es correcto que uses dichos programas para dar directamente un resultado, en forma exacta o aproximada con números decimales, sin más explicaciones.

Ejercicio 5. La parte de la parábola $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ donde $0 \leqslant x \leqslant 2$ gira alrededor de la recta $y = t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2$. Calcula el volumen del sólido resultante (que será una función de t). Calcula el valor de t que hace mínimo el volumen de dicho solido.



Solución. Calculamos el volumen del sólido de revolución por el método de los discos. La sección perpendicular al eje de giro en un punto de abscisa x, $0 \leqslant x \leqslant 2$, es un circulo cuyo radio es $2 - \dfrac{x^2}{2} - t$. El volumen viene dado por:

$$\pi\int_0^2 \left(2-t-\frac{x^2}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 \left((2-t)^2-(2-t)x^2+\frac{x^4}{4}\right) \mathrm{d}x = \pi\left(2(2-t)^2-\frac{8}{3}(2-t)+\frac{8}{5}\right)$$

Definamos
$$V(t) = 2(2-t)^2 - \frac{8}{3}(2-t) + \frac{8}{5}.$$
Se trata de calcular el mínimo absoluto de $V(t)$ en el intervalo $[0,2]$. Sabemos que dicho mínimo absoluto o bien se alcanza en alguno de los extremos del intervalo o en un punto crítico. Tenemos que:
$$V'(t) = -4(2-t) + \frac{8}{3}.$$
El único punto crítico es $t_0 = 4/3$. Fácilmente se obtiene que:
$$V(4/3) = \frac{32}{45} < V(2) = \frac{8}{5} < V(0) = \frac{64}{15}.$$
Por tanto, el mínimo absoluto del volumen se alcanza en el punto $4/3$ y su valor es $32\pi/45$. ☺